ESSAI DU BACCALAUREAT **DUREE : 4h**
SESSION MAI 2014 **COEFFICIENT : 4**
SERIE : D

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Exercice 1 (4 pts)

On considère la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n} \end{cases}$

1°) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x}$.

a) Etudier rapidement la fonction f et construire sa courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 à l'aide de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation y=x.

c) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

2°) a) Démontrer que $f([1\,;5]) \subset [1\,;5]$.

b) En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 5.$$

3°) Soit v la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

4°) a) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

b) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 2 (4 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm.

1°) On considère l'équation :

$$(E) : z \in \mathbb{C},\ z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=0.$$

Vérifier que $z^3-2iz^2+4(1+i)z+16+16i=(z+2)[z^2-2(1+i)z+8(1+i)]$

2°) a) Déterminer les racines carrées de -8-6i

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_1) : z \in \mathbb{C},\ z^2-2(1+i)z+8(1+i)=0$

c) En déduire les solutions de l'équation (E).

3°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives -2 ; 4i et 2-2i.

a) Faire une figure.

b) Soit K le milieu de [BC]. On considère la similitude directe S de centre A, qui transforme B en K. Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.

c) Déterminer l'écriture complexe de S.

d) Déterminer l'angle orienté et le rapport de S.

Problème (12 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose de chercher les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(x)+2f(x)=2x-1$.

1°) Démontrer que la fonction g définie par $g(x)=x-1$ est solution de (E).

2°) Soit (E') l'équation différentielle : $f'(x)+2f(x)=0$.

a) Résoudre (E')

b) Soit k un nombre réel. Démontrer que les fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).

3°) a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de (E) alors f-g est solution de (E')

b) En déduire les solutions de (E).

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-2x}+x-1$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J), d'unité graphique 3cm.

1°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

b) Déterminer la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$

c) Interpréter graphiquement les résultats précédents

2°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3°) a) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$

b) Etudier le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f

4°) a) Démontrer que l'équation : $x \in \left[\frac{\ln 2}{2} ; +\infty\right[$, $f(x)=0$ admet une solution unique α.

b) Démontrer que $\alpha \in]0,79 ; 0,80[$.

c) Construire (C) et (D)

5°) Soit t un nombre réel supérieur à α.

a) Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=t$ et $x=\alpha$.

b) Exprimer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $A(t)$ en fonction de α.